Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

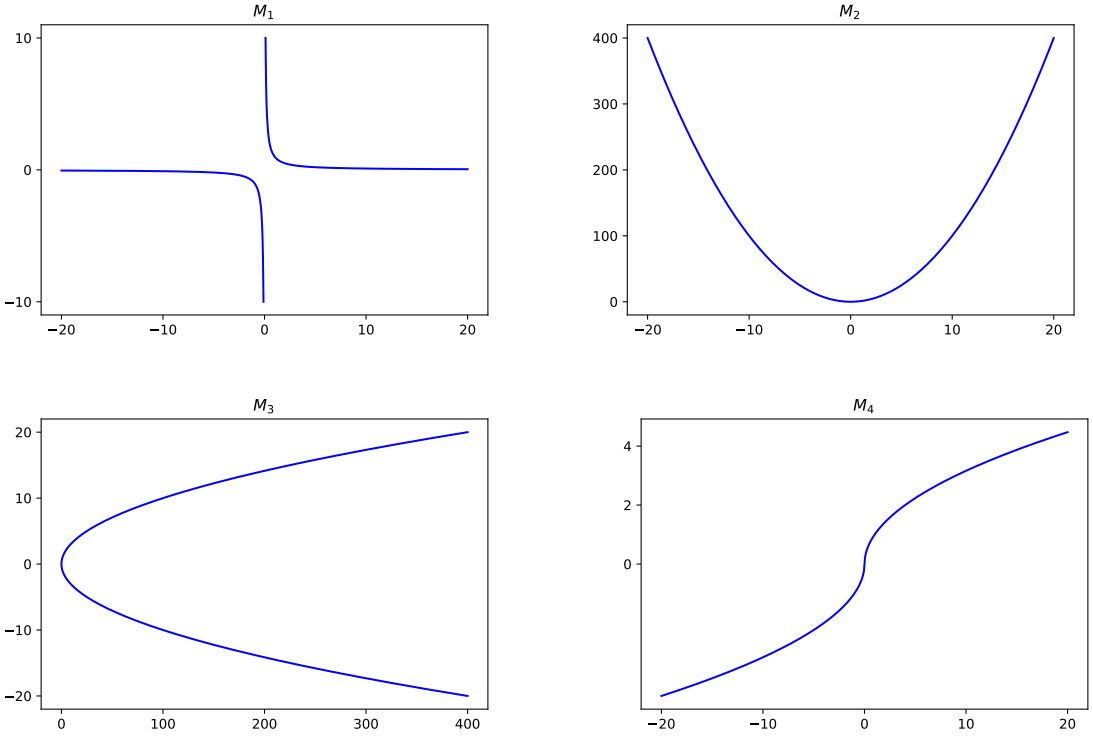
Präsenzblatt — Musterlösung

Aufgabe 1: Skizziere die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ im kartesischen Koordinatensystem.

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\right\}, \quad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\right\},$$

$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x\right\}, \quad M_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}\right\}.$$

Lösung.



■

Aufgabe 2: Eine *affin-lineare* Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt für $a, b \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$f(x) = ax + b \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimme eine affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$.
Ist f somit *eindeutig* bestimmt oder gibt es eine weitere solche Funktion?

(b) Bestimme eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(-1) = 0 = g(4)$ und $g(1) = 4$.
Ist g affin-linear? Ist g eindeutig bestimmt oder gibt es eine weitere solche Funktion?

Lösung. Wir erhalten für (a) aus der Vorschrift für f die zwei Gleichungen

$$b = -1, \qquad a + b = 2, \quad \text{also} \quad f(x) = 3x - 1.$$

Also erfüllt jede Funktion f, die den Anforderungen genügt, die Gleichung $f(x) = 3x - 1$ und ist somit eindeutig. Alternativ kann man zwei solche Funktionen f_1, f_2 betrachten und es ist zu zeigen, dass $f_1 - f_2 = 0$ gilt. Dies folgt ähnlich zur obigen Rechnung, da auch $f_1 - f_2$ affin-linear ist und bei 0 und 1 verschwindet.

Für Aufgabenteil (b) bestimmen wir erst eine affin-lineare Funktion $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1(-1) = 0$ und $g_1(1) = 4$. Es muss also gelten, dass

$$-a + b = 0, \qquad a + b = 4, \quad \text{also} \quad g_1(x) = 2x + 2.$$

Für die zweite affin-lineare Funktion $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g_2(1) = 4$ und $g_2(4) = 0$ finden wir

$$a + b = 4, \qquad 4a + b = 0, \quad \text{also} \quad g_2(x) = -\frac{4x}{3} + \frac{16}{3}.$$

Wir definieren schließlich g als eine zusammengesetzte Funktion über

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in (-\infty, 1], \\ g_2(x), & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

und diese Funktion erfüllt unsere Anforderungen. Andererseits ist diese Funktion überhaupt nicht eindeutig: Wir können zB. einen Ansatz als quadratisches Polynom mit drei Koeffizienten wählen oder sogar (da keine Eigenschaften weiterhin von g gefordert sind) eine beliebige konstante Funktion wählen, deren Werte an den drei Punkten entsprechend abgeändert sind. ■

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom, für $b, c \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x^2 + bx + c \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Leite die *Gleichungen von Vieta* her, wonach reelle Nullstellen $x_{1,2}$ von f den Bedingungen

$$x_1 + x_2 = -b \qquad \text{und} \qquad x_1 x_2 = c$$

genügen. Zeige für $c \neq 0$ außerdem, dass Lösungen x_1, x_2 der Gleichungen von Vieta die Nullstellen von f sind.

Lösung. Wir erhalten aus der klassischen p-q-Formel die Gleichungen

$$x_1 = \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \qquad x_2 = \frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Diese Gleichungen zu addieren liefert $x_1 + x_2 = -b$ während Multiplikation durch eine binomische Formel

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\right)^2 = c$$

liefert. Falls $c \neq 0$ gilt, muss auch $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ gelten, und wir lösen auf für $x_2 = c/x_1$, woraus mit der ersten Gleichung

$$x_1 + c/x_1 = -b \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^2 + bx_1 + c = 0$$

folgt. ■

Aufgabe 4: Für $p, q > 0$ seien $u, v \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $u^3 + v^3 = q$ und $uv = -p/3$. Verifiziere dann die beiden folgenden Aussagen.

(a) $x_0 := u + v$ ist eine Nullstelle des Polynoms $f(x) := x^3 + px - q$.

(b) u^3 und v^3 sind die Nullstellen des Polynoms $g(y) := y^2 - qy - p^3/27$.

(c) Stelle u und v jeweils als Ausdruck in p und q dar.

Bestimme nun unter Verwendung von (a)-(c) mit Polynomdivision die Nullstellen von

$$h(z) := z^3 + 63z - 316.$$

Lösung. Für Aufgabenteil (a) berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (u+v)^3 + p(v+u) - q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) - q \\ &= (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) + p(u+v) - q = q + -p(u+v) + p(u+v) - q = 0. \end{aligned}$$

Also ist $u + v$ eine Nullstelle von f.

In Aufgabenteil (b) bemerken wir, dass für $b = -q$ und $c = -p^3/27 \neq 0$ die Gleichungen von Vieta aus Aufgabe 3 für $(u^3, v^3) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt sind. Also sind u^3 und v^3 die Nullstellen $y_{1,2}$ von g und wir finden

$$y_{1,2} = q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$$

und wir bestimmen u und v für Aufgabenteil (c) durch Ziehen der dritten Wurzel.

Für die Koeffizienten von h gilt $q = 316$ und $p = 63$, also folgt nach Aufgabenteil (b), dass

$$u = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} = 7, \qquad v = \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} = -3,$$

und damit ist $u + v = 4$ eine Nullstelle von h. Unter Verwendung von Polynomdivision finden wir ferner

$$h(z) : (z - 4) = z^2 + 4z + 79$$

und dieses Polynom hat keine weiteren reellen Nullstellen, da Wurzel $\sqrt{4 - 79} = \sqrt{-75}$ nicht mehr als reelle Zahl definiert ist. Also ist 4 die einzige Nullstelle von h. ■